

26/10/2016

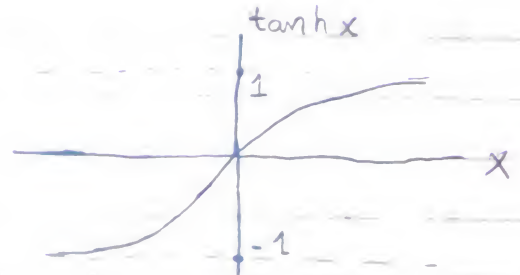
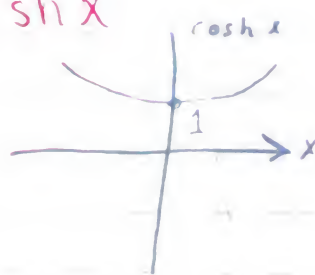
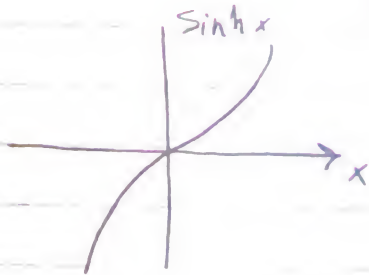
الأربعاء

د. محمود قهي

محاضرة 5

## \* Hyperbolic tangent function ( $\tanh$ )

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$



$$\frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1 = \tanh x = \text{bipolar sigmoid at } \alpha = 2$$

\* The hyperbolic tangent  $\tanh x$  is the same as a bipolar sigmoidal function  $g(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1$  ( $\alpha = 2$ )

$$\frac{2}{1 + e^{-\alpha x}} - 1 = \tanh\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$$

\* The bipolar sigmoidal function  $g(x) = \frac{2}{1 + e^{-\alpha x}}$  is the same as a hyperbolic tangent function of the form  $\tanh\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$

$$\frac{d}{dx} (\tanh x) = \text{sech}^2 x$$

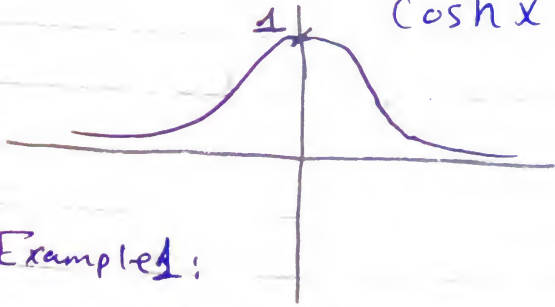
التفاضل

$$\text{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

$$\frac{d}{dy} (s) = 1 - s^2$$

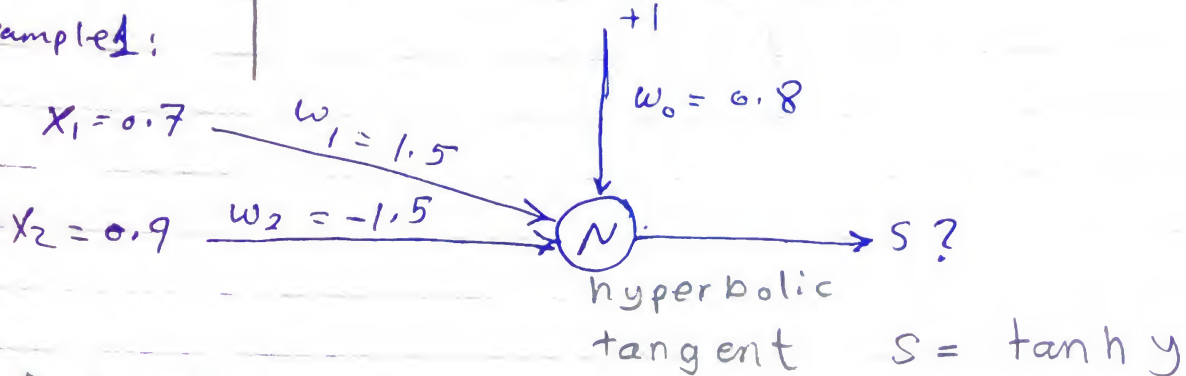
نستخدم  $\tanh$  لدراسة علاقاتها معروفة (التفاضلات، المتغيرات)

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x}$$



لو حيت  $\pm 1$  الجواب مفروض  
باضد القيم الموجبة لحد 1 بس

Example 1:



Activation

$$y = (0.7)(1.5) + (0.9)(-1.5) + 0.8$$

$$= 0.5$$

output signal, for a hyperbolic tangent function as a bipolar sigmoid

$$S = \tanh y = \tanh 0.5 = 0.462$$

Example 2:

في حالة السابقة، لم نعرف  $x_1, x_2$  والوزن  $w_1, w_2$  لم نثبتها  
عنا قيم السابقة، بينا Bias weight  $w_0$  اعتبر Parameter لتعريف  
أو  $w_0$  لما كانت النتيجة 0.81

$$S = \tanh y \Rightarrow y = \tanh^{-1} S$$

$$\text{for } S = 0.81 \Rightarrow y = \tanh^{-1} = 1.127$$

$$y = (0.7)(1.5) + (0.9)(-1.5) + w_0$$

عوض  
وحدات  $w_0$

$$1.127 = -0.3 + w_0$$

$$w_0 = 1.427$$

المعرف مع مسائل نبقي familier مع ال ANN

Example 3:-

Find the value of the derivative of the output signal with respect to the activation in ex 2

$$S = \tanh y \rightarrow \frac{ds}{dy} = \frac{d(\tanh y)}{dy} \\ = \operatorname{sech}^2 y = 1 - \tanh^2 y$$

$$\boxed{\frac{ds}{dy} = 1 - s^2}$$

For the previous example

$$\frac{ds}{dy} = 1 - (0.81)^2 = 0.344$$

Example 4:-

a neuron employs a hyperbolic tangent function. Under certain operating conditions; the derivative of the output signal  $S$  with respect to the activation  $y$  is found to be 0.441. Find the values of  $y$  and  $S$

Solution:-

$$S = \tanh y \quad \leftarrow \text{معنى}$$

$$\frac{ds}{dy} = \operatorname{sech}^2 y = 0.441$$

$$\Rightarrow \operatorname{sech} y = \sqrt{0.441} = \pm 0.664$$

Remember that



الإشارة إلى أن  $\operatorname{sech}$  دالة زوجية



$$\therefore y = \operatorname{sech}^{-1}(0.664) = \pm 0.968$$

هنا يقع قيمته على  $\pm$  لأن  $\operatorname{sech}$  دالة even

$$S = \tanh(\pm 0.968)$$

$$= \pm 0.748$$

هنا يقع قيمته على  $\pm$  موجوده

في مدى نطاق  $\tanh$  من  $[-1, 1]$

Alternative Solution: يمكن حلها بطريقة أخرى كما يلي:

$$S = \tanh y$$

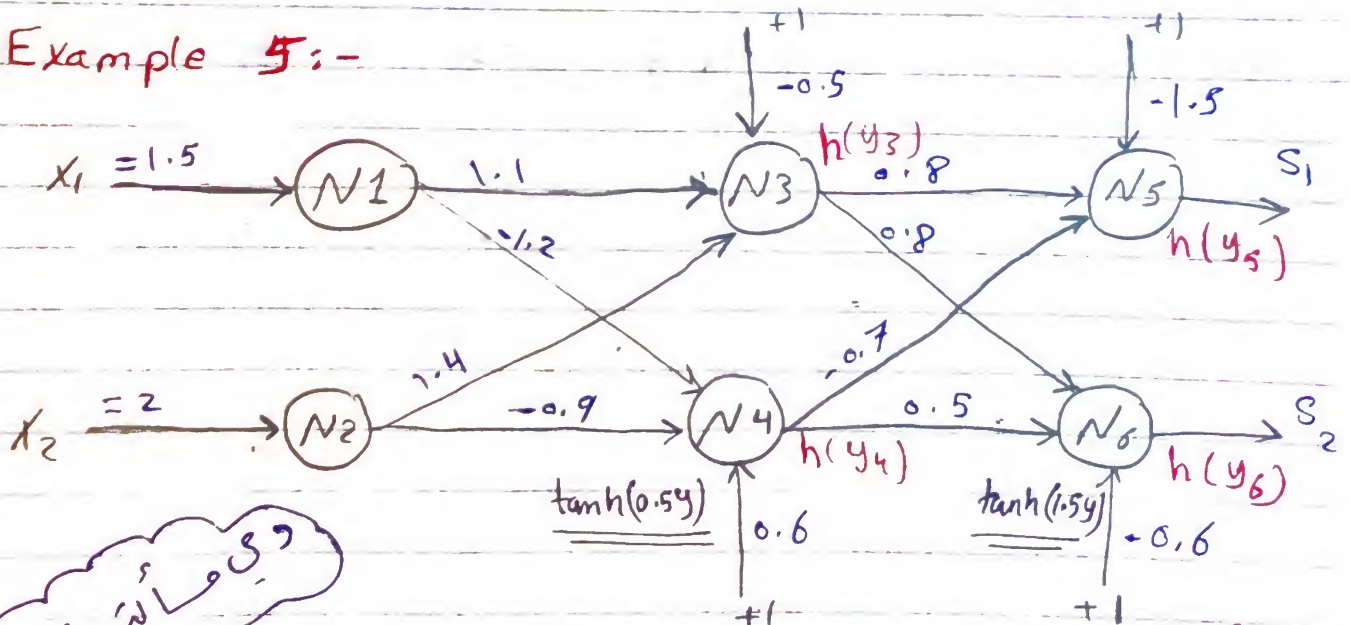
$$\frac{ds}{dy} = 1 - \tanh^2 y = 0.441$$

$$\tanh y = \sqrt{1 - 0.441} = \boxed{\pm 0.748} \rightarrow (S)$$

$$y = \tanh^{-1} S = \tanh^{-1}(\pm 0.748)$$

$$= \pm 0.968$$

Example 5:-



في مثالنا هذا

Activation Function

$$h(x) = \tanh(\alpha x)$$

$\alpha = 0.5$   
Hidden Layer

output  
 $\alpha = 1.5$

\* For Hidden neuron  $N_3$  ( $\alpha = 0.5$ )

Activation,

$$\# y_3 = (1.5)(1.1) + (2)(1.4) - 0.5 = 3.95$$

$$\# \text{output } h(y_3) = \tanh(0.5 y_3) = \tanh(0.5 \times 3.95) \\ \xrightarrow{\text{hyperbolic}} = 0.962$$

\* For Hidden neuron  $N_4$  ( $\alpha = 0.5$ )

Activation

$$\# y_4 = (1.5)(-1.2) + (2)(-0.9) + 0.6 = -3$$

$$\# \text{output } h(y_4) = \tanh(0.5 y_4) = \tanh(0.5 \times -3) \\ = -0.905$$

\* For output  $N_5$  ( $\alpha = 1.5$ )

$$\# \text{Activation, } y_5 = h(y_3)(0.8) + h(y_4)(-0.7) - 1.5 \\ = (0.962)(0.8) + (-0.905)(-0.7) - 1.5 \\ = -0.097$$

$$\# \text{output signal, } S_1 = h(y_5) = \tanh(1.5 y_5) \\ = \tanh(-1.5 \times 0.097) = -0.144$$

\* For output  $N_6$  ( $\alpha = 1.5$ )

$$\# \text{activation, } y_6 = h(y_3)(0.8) + h(y_4)(0.5) - 0.6 \\ = (0.962)(0.8) + (-0.905)(0.5) - 0.6 \\ = -0.283$$

# output signal  $S_2$ ;

$$S_2 = h(y_6) = \tanh(1.5 y_6) = \tanh(-1.5 \times 0.283) \\ = -0.401$$



تستطيع في كثير من الأحيان أن نوجد قيم الـ Inputs للـ شبكة بحرفة الـ outputs

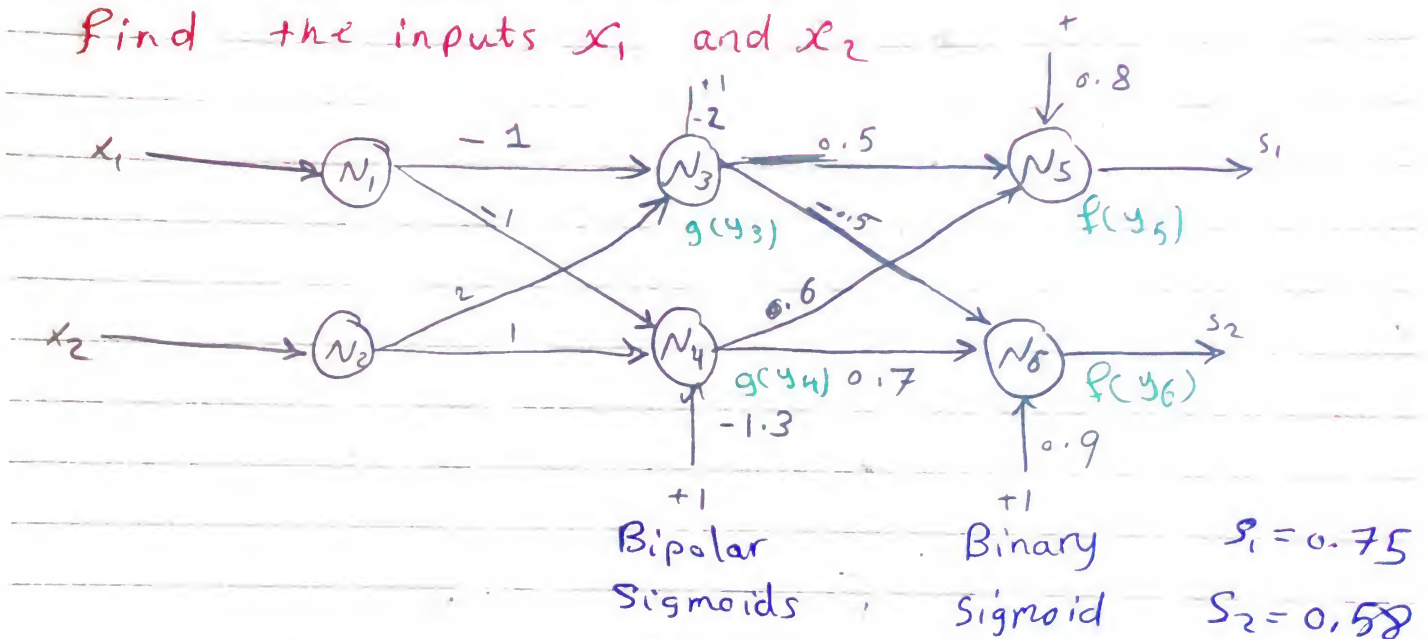
given the outputs of ANN, find the inputs

Example 6:-

\* In the two-input, two-output neural network shown, the hidden neurons employ bipolar sigmoidal functions while the output neurons employ binary sigmoidal functions. If the outputs are measured as

$$S_1 = 0.75 \quad \text{and} \quad S_2 = 0.58$$

find the inputs  $x_1$  and  $x_2$



# طالعنا يذكر في السؤال قيمة  $\alpha$  فنكتل منها بـ 1

output layer ( $N_5$  and  $N_6$ ) (Binary Sigmoids)

$$N_5 \Rightarrow y_5 = \ln \left( \frac{S_1}{1-S_1} \right) = \ln \left( \frac{0.75}{1-0.75} \right) = 1.099$$

$$N_6 \Rightarrow y_6 = \ln \left( \frac{S_2}{1-S_2} \right) = \ln \left( \frac{0.58}{1-0.58} \right) = 0.323$$

$$y_5 = 0.5 g(y_3) + 0.6 g(y_4) + 0.8 = 1.099$$

$$\Rightarrow 0.5 g(y_3) + 0.6 g(y_4) = 0.299 \quad \dots (1)$$

$$y_6 = -0.5 g(y_3) + 0.7 g(y_4) + 0.9 = 0.323$$

$$\Rightarrow -0.5 g(y_3) + 0.7 g(y_4) = -0.557 \quad \dots (2)$$

حل معادلتين في مجهولين

لحل معادلتين (1) و (2)

$$g(y_3) = 0.855$$

$$g(y_4) = -0.214$$

Now we move to the hidden layer where the activation is bipolar sigmoid

$$y_3 = \ln \left( \frac{1 + g(y_3)}{1 - g(y_3)} \right) = \ln \left( \frac{1 + 0.855}{1 - 0.855} \right) = 2.549$$

$$y_4 = \ln \left( \frac{1 + g(y_4)}{1 - g(y_4)} \right) = \ln \left( \frac{1 + (-0.214)}{1 - (-0.214)} \right) = -0.435$$

مع جهة أخرى، يمكن كتابة

$$y_3 = -x_1 + 2x_2 - 2$$

$$\Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 4.549 \quad \dots (3)$$

$$y_4 = -x_1 + x_2 - 1.5 = -0.435$$

$$-x_1 + x_2 = 0.865 \quad \dots (4)$$

لحل (3) و (4)

$$x_1 = 2.819$$

$$x_2 = 3.684$$

Simultaneously

ولمض أن ذلك في الحد السابق تم حل معادلتين آتيتين (1) و (2) لاستخراج  $y_3$  و  $y_4$  ثم بعد (3) و (4) أقمنا بإيجاد  $x_1$  و  $x_2$

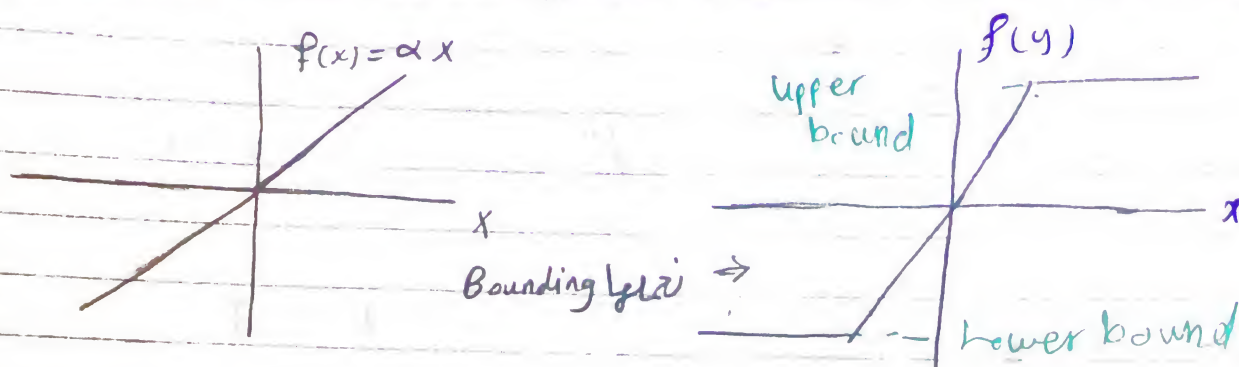
ولمض أننا في الحد التالي نحسب المدخلات output ← input حيث بدأنا من الـ output للشبكة وهو معطى، وانضمنا بإيجاد قيم الـ input



Summary:

Input  $\rightarrow$  output (Forward Path)  $\rightarrow$  input - hidden - output  
 Output  $\rightarrow$  Input (Backward Path) output - hidden - input

# Sometimes we use a linear function for activation

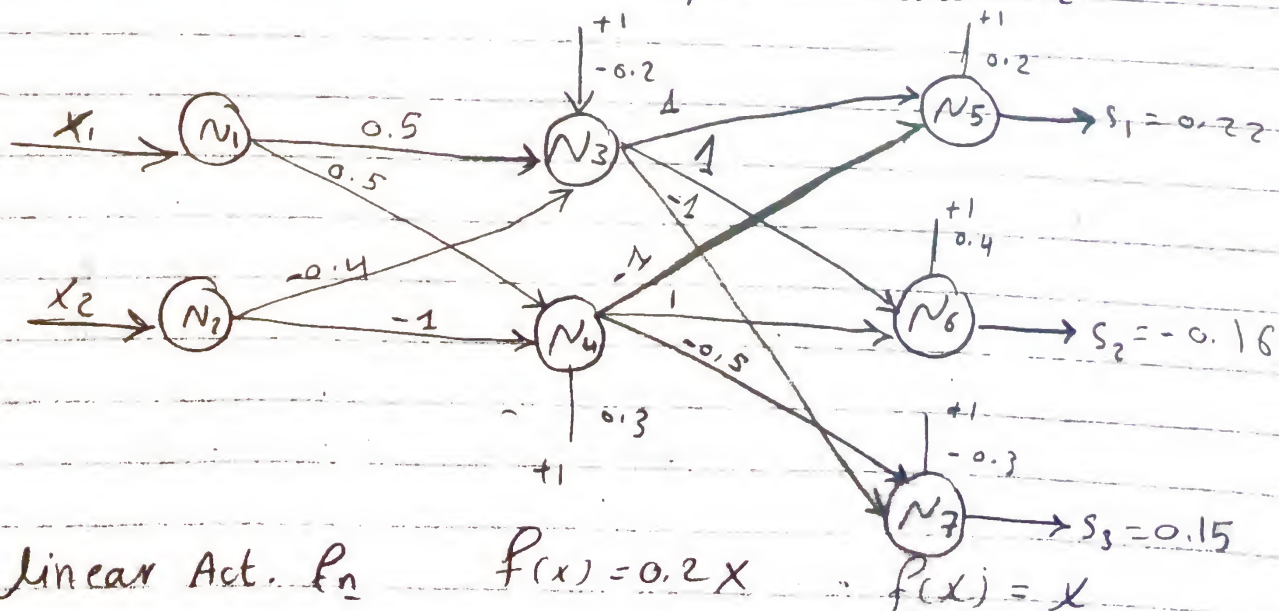


Bounds یابی (دانش هم، یابی، علیا، اند، حاد، تر، بد، ای  $\infty$ )

Example 7:-

Consider the two-input, three-output neural network shown. The hidden and output neurons employ linear functions of the form  $f(x) = \alpha x$ ; with  $\alpha = 0.2$  for each hidden neuron and  $\alpha = 1$  for each output neuron.

If the outputs are found to be  $S_1 = 0.22$ ,  $S_2 = -0.16$ ,  $S_3 = 0.15$ , determine the inputs  $x_1$  and  $x_2$ .





## # Outputs of the network

$$S_1 = f(y_5) = y_5 \quad \text{Since } f(x) = x \quad (\text{linear})$$

$$= 0.22$$

$$S_2 = f(y_6) = y_6 = -0.16$$

$$S_3 = f(y_7) = y_7 = 0.115$$

## Activations of the output neurons

$$y_5 = (1) f(y_3) + (-1) f(y_4) + 0.2 = 0.22$$

$$f(y_3) - f(y_4) = 0.02 \quad \dots (1)$$

$$y_6 = (1) f(y_3) + (1) f(y_4) + 0.4 = -0.16$$

$$f(y_3) + f(y_4) = -0.56 \quad \dots (2)$$

عملية إيجاد الناتج من معادلتين بس لازم إعتد منها مع  $y_7$  للتأكد من إحصائية وجود حل

$$y_7 = (-1) f(y_3) + (-0.5) f(y_4) + 0.3 = 0.115$$

$$f(y_3) + 0.5 f(y_4) = -0.415 \quad \dots (3)$$

إذا كانت المعادلات مستقلة عن بعضها وعددها أكبر من عدد المعادلات يكون هناك عدد لا نهائي من الحلول (لا يوجد حل)

\* تذكر صفراء ان الشبكة شفافة ، بالتالي لازم حل من حل .

\* هنا لدينا ثلاث معادلات في مجهولين  $f(y_3), f(y_4)$  وإذا كانت هذه المعادلات مستقلة عن بعضها البعض فلا يوجد حل (عدد المعادلات أكبر من عدد المجهولين) ولكن بما أنه الشبكة تقدم في ظروف معينة وإذا لابد أنه لا يكون هناك في مواصفات الشبكة أي تعارض فيزيائي أو رياضي أو منطقي

\* بالتالي نتوقع أنه المعادلات الثلاث السابقة هي في الواقع معادلات (والمعادلة الثالثة معقدة عليهما)

\* هذا يعني أنه يكفي لإيجاد الجواب  $f(y_3), f(y_4)$  أنه حل معادلتين فقط من المعادلات الثلاث وسنجد أن النتيجة لتقريباً المعادلة الثالثة  
 \* نختار حل معادلتين (1) (2) فقط

$$f(y_3) = -0.27$$

$$f(y_4) = -0.29$$

لنحقق من أن هاتين المعادلتين رقم (3)

\* Activations of the hidden neurons

$$y_3 = \frac{f(y_3)}{0.2}$$

$$\text{since } f(y_3) = 0.2 y_3$$

$$= \frac{-0.27}{0.2} = -1.35$$

$$= 0.5 x_1 - 0.4 x_2 - 0.2$$

$$\Rightarrow 0.5 x_1 - 0.4 x_2 = -1.15 \quad \text{--- (4)}$$

$$y_4 = \frac{f(y_4)}{0.2} = \frac{-0.29}{0.2} = -1.45$$

$$= 0.5 x_1 - x_2 + 0.3$$

$$\Rightarrow 0.5 x_1 - x_2 = -1.75 \quad \text{--- (5)}$$

\* حل المعادلتين (4) و (5)

$$x_1 = -1.5$$

$$x_2 = 1$$

Example 8:-

A single neuron receives two inputs  $x_1 = 0.8$  and  $x_2 = 1.2$  with weights  $w_1 = 1.6$  and  $w_2 = 0.6$ , respectively. the bias weight is

$$w_0 = 1.4$$

the neuron employs a ~~hyper~~ hyperbolic tangent  $f_n$  in the form

$$S = \tanh(\alpha y). \text{ Where } S \text{ is the output } \boxed{10}$$

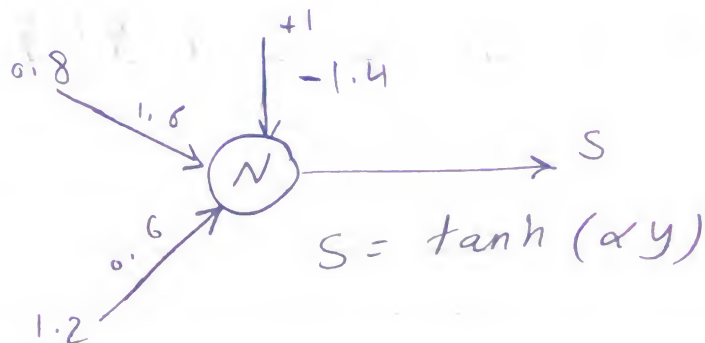


Signal.  $y$  is the activation and  $\alpha$  is a positive parameter.

The derivative of  $S$  with respect to  $y$  is found to be 0.311

Calculate the values of  $\alpha$ ,  $y$ , and  $S$ .

Solution



\* Activation

$$y = (0.8)(1.6) + (0.6)(1.2) - 1.4 = \boxed{0.6}$$

\* Derivative

$$\frac{ds}{dy} = \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha y) = \alpha [1 - \tanh^2(\alpha y)]$$

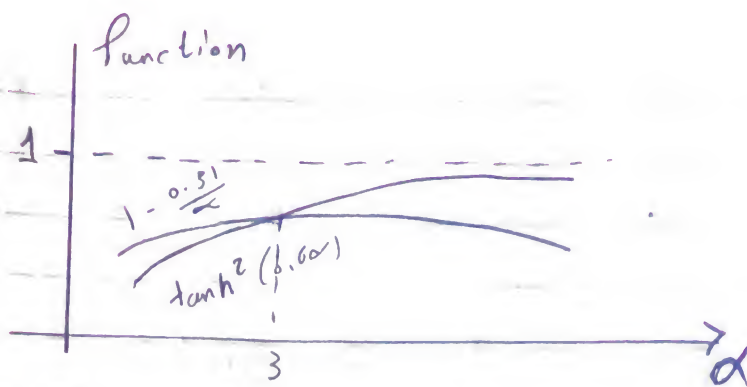
Trick

$$= 0.311$$

$$\tanh^2(0.6\alpha) = 1 - \frac{0.311}{\alpha}$$

الآن يمكننا حل المعادلة السابقة برسم منحنى الطرفين  
الأيسر ومنحنى الطرف الأيمن ونقطة التقاطع تعطينا قيمة  $\alpha$   
التي تحقق المعادلة

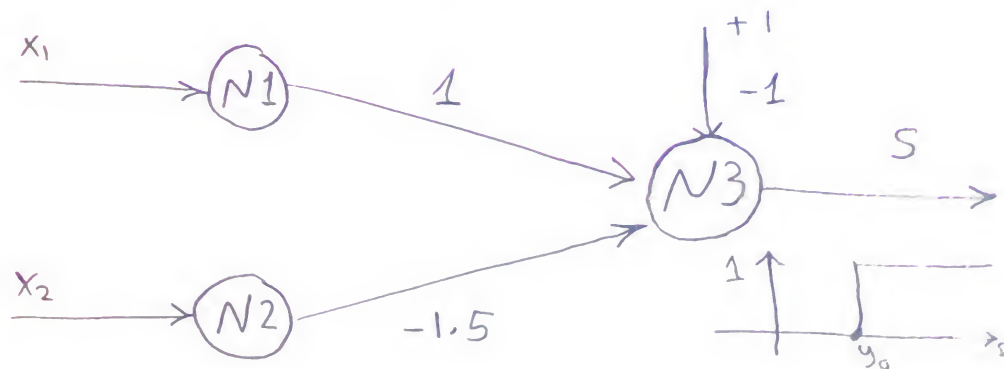
$\alpha$	1	2	3	4	5	6
$\tanh^2(0.6\alpha)$	0.228					
$1 - \frac{0.31}{\alpha}$	0.689					



output signal

$$s = \tanh(0.6 \times 3) = 0.947$$





\* activation  $y = x_1 - 1.5x_2 - 1$

①  $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow S = 1$   
 $y = -1$

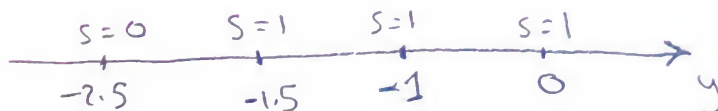
②  $x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow S = 1$   
 $y = 1 - 1 = 0$

③  $x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow S = 0$   
 $y = -1.5 - 1 = -2.5$

④  $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow S = 1$   
 $y = 1 - 1.5 - 1 = -1.5$

$x_1 + x_2$  table

$x_2$	$x_1$	$S$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



$\therefore -2.5 < y_0 < -1.5$

check with  $y_0 = -2 \Rightarrow$

①  $y = -1 > -2 \Rightarrow S = 1$

③  $y = -2.5 < -2 \Rightarrow S = 0$

②  $y = 0 > -2 \Rightarrow S = 1$

④  $y = -1.5 < -2 \Rightarrow S = 1$